**试卷代号:1012** **座位号□□**

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期“开放本科”期末考试

# 计算机专业计算机数学基础(2)试题

2002年1月

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 分 数 | | | | | |

| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 数 $a^* = 0.69314718\cdots$ 的有四位有效数字的近似值是(　　)

(A)0.69314　　(B)0.6930

(C)0.6932　　(D)0.69315

2. 设线性方程组 $X = BX + f$,$n$ 阶矩阵 $B$ 的特征根为 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$,对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及 $f$,对应此方程组的迭代格式

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f, k = 1,2,\cdots$$

都收敛的充分必要条件是(　　)

(A) $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| < 1$　　(B) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$

(C) $\max_{1\le i\le n} |\lambda_i| < 1$　　(D) $\min_{1\le i\le n} |\lambda_i| < 1$

3. 已知函数 $y = f(x)$ 在5个互异节点处的函数值,其一阶、二阶均差均不为0,三阶均差是1,那么用这5对数值作的插值多项式 $P(x)$ 是(　　)

(A)五次多项式　　(B)四次多项式

(C)三次多项式　　(D)二次多项式

4. 已知当 $x = 1,2$ 时的函数值 $f(1)$、$f(2)$,则 $f'(1) \approx$(　　)

(A)$f(1) - f(2)$　　(B)$f(2) - f(1)$

(C)$\frac{1}{2}[f(1) + f(2)]$　　(D)$\frac{1}{2}[f(2) - f(1)]$



5. 解常微分方程初值问题的欧拉法的局部截断误差是(　　)

(A)$O(h^5)$　　(B)$O(h^4)$

(C)$O(h^3)$　　(D)$O(h^2)$

| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 近似值2.15的相对误差限不大于________,则它至少有三位有效数字。

7. 用高斯—赛德尔迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

的迭代格式中 $x_2^{(k+1)} =$ ________ $(k = 0,1,2,\cdots)$

8. 用列主元消去法解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$,在做第1次消元之前,选择主元为______。

9. 用梯形求积公式计算积分 $\int_1^2 x^2 dx \approx$ ________。

10. 已知当 $n = 4$ 时,科茨系数为 $C_0^{(4)} = C_4^{(4)} = \frac{7}{90}, C_1^{(4)} = C_3^{(4)} = \frac{32}{90}, C_2^{(4)} = \frac{12}{90}$,等分区间 $[a,b]$,分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$,那么科茨求积公式是

$\int_a^b f(x)dx \approx$ ____________________。



| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 用雅可比迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

从初始值 $(0,0,0)^T$ 开始,计算出第3次迭代结果,并要求写出迭代公式,计算过程中保留4位小数。

12. 设函数值表为

| $x$ | 1 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −7 | 5 | 8 | 14 |

试求拉格朗日插值多项式(要求合并同类项,整理成一个多项式)。

13. 用迭代法求方程 $2x - \lg x = 7$ 的近似根,所求近似根满足 $|2x - \lg x - 7| < 0.005$,计算过程中保留3位小数。

14. 用改进的欧拉法平均形式公式,取步长 $h = 0.2$,求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -2xy (0 \le x \le 0.4) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

计算过程中保留4位小数。

| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 四、证明题(本题10分)

15. 已知勒让德多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$,证明两点 $(n = 2)$ 的高斯—勒让德求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



**试卷代号:1012**

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期“开放本科”期末考试

# 计算机专业计算机数学基础(2)
# 试题答案及评分标准

(供参考)

2002年1月

## 一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A　　2. C　　3. C　　4. B　　5. D

## 二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $\frac{1}{2\times 3} \times 10^{-2}$

7. $3 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}$

8. $-4$

9. $\frac{5}{2}$

10. $(b-a)[\frac{7}{90}f(a) + \frac{32}{90}f(x_1) + \frac{12}{90}f(x_2) + \frac{32}{90}f(x_3) + \frac{7}{90}f(b)]$

## 三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 解　迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \quad (k = 0,1,2) \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases}$$ (5分)

当 $k = 0$ 时,$X^{(0)} = (0,0,0)^T$,易得 $X^{(1)} = (0.3000, 1.5000, 2.0000)$ (7分)

当 $k = 1$ 时,$X^{(1)} = (0.3000, 1.5000, 2.0000)$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.2\times 1.5 + 0.1\times 2 + 0.3 = 0.8000 \\ x_2^{(2)} = 0.2\times 0.3 + 0.1\times 2 + 1.5 = 1.7600 \\ x_3^{(2)} = 0.2\times 0.3 + 0.4\times 1.5 + 2 = 2.6600 \end{cases}$$ (12分)



当 $k = 2$ 时,$X^{(2)} = (0.8000, 1.7600, 2.6600)$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.2\times 1.76 + 0.1\times 2.66 + 0.3 = 0.9180 \\ x_2^{(3)} = 0.2\times 0.8 + 0.1\times 2.66 + 1.5 = 1.9260 \\ x_3^{(3)} = 0.2\times 0.8 + 0.4\times 1.76 + 2 = 2.8640 \end{cases}$$ (15分)

12. 解　插值基函数分别为

$$l_0(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} = -\frac{1}{30}(x^3 - 13x^2 + 54x - 72)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} = \frac{1}{6}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} = -\frac{1}{6}(x^3 - 10x^2 + 27x - 18)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} = \frac{1}{30}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)$$ (9分)

多项式为

$$P_3(x) = \frac{7}{30}(x^3 - 13x^2 + 54x - 72) + \frac{5}{6}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24)$$

$$- \frac{8}{6}(x^3 - 10x^2 + 27x - 18) + \frac{14}{30}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)$$

$$= \frac{1}{5}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$$ (15分)

13. 解　记 $f(x) = 2x - \lg x - 7$。可以得到

$f(3.5) < 0, f(4) > 0$,取有根区间为 $[3.5, 4]$ (4分)

建立迭代公式

$$x = \frac{1}{2}(\lg x + 7) = \varphi(x)$$ (7分)

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\ln 10} \cdot \frac{1}{x}, \max_{3.5\le x\le 4} |\varphi'(x)| \le \frac{1}{2\times 3.5\ln 10} < 1$$ (9分)

取初始值 $x_0 = 3.5$ 进行迭代,

$$x_1 = \frac{1}{2}(\lg 3.5 + 7) = 3.772, |f(3.772)| \approx 0.03$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\lg 3.772 + 7) = 3.788, |f(3.778)| \approx 0.002$$



$x \approx 3.788$ 是满足要求的近似根。(15分)

注:取初始值为4,第2次迭代值为3.790满足要求。近似值 $x$ 满足 $3.787 \le x \le 3.790$,均为满足要求的解。

14. 解　改进欧拉法的平均形式的公式为

$$\begin{cases} y_p = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_c = y_k + hf(x_{k+1}, y_p) \quad k = 0,1 \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$ (4分)

$h = 0.2, f(x_k, y_k) = -2x_k y_k$

计算公式为

$$\begin{cases} y_p = y_k - 0.4x_k y_k \\ y_c = y_k + 0.4x_{k+1} y_p \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$ (9分)

当 $k = 0$ 时,$x_0 = 0, y_0 = 1, x_1 = 0.2$

$$\begin{cases} y_p = 1 - 0.4\times 0\times 1 = 1 \\ y_c = 1 - 0.4\times 0.2\times 1 = 0.92 \\ y_1 = \frac{1}{2}(1 + 0.92) = 0.96 \end{cases}$$ (12分)

$y(0.2) \approx y_1 = 0.96$

当 $k = 1$ 时,$x_1 = 0.2, y_1 = 0.96, x_2 = 0.4$

$$\begin{cases} y_p = 0.96 - 0.4\times 0.2\times 0.96 = 0.8832 \\ y_c = 0.96 - 0.4\times 0.4\times 0.8832 = 0.8187 \\ y_1 = \frac{1}{2}(0.8832 + 0.8187) = 0.8510 \end{cases}$$ (15分)

$y(0.4) \approx 0.8510$

## 四、证明题(本题10分)

15. 证明　当 $n = 2$ 时,$P_2(x) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

令 $P_2(x) = 0$,得到 $x_{0,1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,两个高斯点。(4分)



构造求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

由代数精度的定义,上式对 $f(x) = 1, x$ 精确成立,有

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 \\ 0 = -A_0 \frac{1}{\sqrt{3}} + A_1 \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ (9分)

解得 $A_0 = A_1 = 1$,得到求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ (10分)