试卷代号:1012 **座位号□□**

中央广播电视大学2002—2003学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)试题

2003年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若误差限为0.5×10^{-5},那么近似数0.003400有(　　)位有效数字.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

2. 当线性方程组$AX=b$的系数矩阵A是(　　)时,用列主元消去法解$AX=b$,A的主对角线的元素一定是主元.

A. 上三角形矩阵

B. 主对角线元素不为0的矩阵

C. 对称且严格对角占优矩阵

D. 正定对称矩阵

3. 下列条件中,不是分段线性插值函数$P(x)$必须满足的条件为(　　).

A. $P(x_k)=y_k,(k=0,1,\cdots,n)$

B. $P(x)$在$[a,b]$上连续

C. $P(x)$在各子区间上是线性函数

D. $P(x)$在各节点处可导

4. 有 3 个不同节点的高斯求积公式的代数精度是(　　)次的.

A. 5

B. 6

C. 7

D. 3

5. 解微分方程初值问题的方法,(　　)的局部截断误差为 $O(h^3)$.

A. 欧拉法

B. 改进欧拉法

C. 三阶龙格—库塔法

D. 四阶龙格—库塔法

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 已知 $x_1^*=x_1\pm0.5\times10^{-3}$,$x_2^*=x_2\pm0.5\times10^{-2}$,那么近似值 x_1,x_2 之差的误差限是________________.

7. 用列主元消去法解线性方程组 $AX=b$,在第 $k-1$ 步消元时,增广矩阵的第 k 列取主元 $a_{rk}^{(k-1)}$,使得 $|a_{rk}^{(k-1)}|=$________________.

8. 已知函数 $f(0.4)=0.411$,$f(0.5)=0.578$,$f(0.6)=0.697$,用此函数表作牛顿插值多项式,那么插值多项式 x^2 的系数是________.

9. 牛顿—科茨求积公式中的科茨系数 $C_k^{(n)}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 满足的两条性质是________________________________.

10. 用牛顿法求方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的根,已知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 内不为 0,$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 内不变号,那么选择初始值 x_0 满足________________________,则它的迭代解数列一定收敛到方程 $f(x)=0$ 的根.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 已知一组试验数据

x_k	2	2.5	3	4	5	5.5
y_k	4	4.5	6	8	8.5	9

试用直线拟合这组数据.(计算过程保留 3 位小数)

12. 将区间[1,9]作 8 等分,试用复化梯形公式求积分 $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ 的近似值,计算过程中保留 3 位小数.

13. 用弦截法求方程 $x-\sin x-0.5=0$ 在[1.4,1.6]之间的一个近似根,满足 $|x_{k+1}-x_k|\leq 0.01$,计算过程保留 4 位小数.

14. 用四阶龙格—库塔法求解初值问题 $\begin{cases} y'+y=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$,取 $h=0.2$,求 $x=0.2,0.4$ 时的数值解.要求写出由 h,x_k,y_k 直接计算 y_{k+1} 的迭代公式.计算过程保留 3 位小数.已知四阶龙格—库塔法斜率值公式为 $\kappa_1=f(x_k,y_k)$　$\kappa_2=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_1)$　$\kappa_3=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_2)$

$\kappa_4=f(x_k+h,y_k+h\kappa_3)$

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明解线性方程组 $AX=b$ 的雅可比迭代收敛,其中 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

试卷代号：1012

中央广播电视大学2002—2003学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)

试题答案及评分标准

（供参考）

2003年1月

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. B　　2. C　　3. D　　4. A　　5. B

二、填空题（每小题3分，共15分）

6. 0.55×10^{-2}

7. $\max\limits_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$

8. -2.4

9. $\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1$；$C_k^{(n)}=C_{n-k}^{(n)}$（或归一性和对称性）

10. $f(x_0)f''(x_0)>0$（或 $f(x_0)$ 与 $f''(x_0)$ 同号）

三、计算题（每小题15分，共60分）

11. 设直线 $y=a_0+a_1x$，那么 a_0,a_1 满足的法方程组公式为

$$\begin{cases}a_0n+a_1\sum x_k=\sum y_k\\ a_0\sum x_k+a_1\sum x_k^2=\sum x_ky_k\end{cases}\qquad\text{(3 分)}$$

代入数据，经计算得到法方程组为

$$\begin{cases}6a_0+22a_1=40\\ 22a_0+90.5a_1=161.25\end{cases}\qquad\text{(9 分)}$$

解得 $a_0=1.229\quad a_1=1.483$　　(14分)

所求直线方程为 $y=1.229+1.483x$　　(15分)

12. 计算列表

k	x_k	$f(x_k)=\sqrt{6x-5}$
0	1	1.000
1	2	2.646
2	3	3.606
3	4	4.359
4	5	5.000
5	6	5.568
6	7	6.083
7	8	6.557
8	9	7.000

（8 分）

$h=1$，用复化梯形公式

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_8)+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)] \qquad (12\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}\times[1+7+2(2.646+3.606+4.359+5.000+5.568+6.083+6.557)]$$

$$=37.819 \qquad (15\text{ 分})$$

13. 设 $f(x)=x-\sin x-0.5$，取 $x_0=1.4$，$x_1=1.6$，$f(1.4)=-0.0855<0$，$f(1.6)=0.1004>0$，故 $f(x)=0$ 在 $[1.4,1.6]$ 内有根. （3 分）

弦截法的公式为：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1}) \qquad (n=1,2\cdots)$

于是，代入函数 $f(x)$，本题有迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sin x_n-0.5}{x_n-x_{n-1}-\sin x_n+\sin x_{n-1}}(x_n-x_{n-1}) \qquad (7\text{ 分})$$

$$x_2=1.6-\frac{1.6-\sin 1.6-0.5}{1.6-1.4-\sin 1.6+\sin 1.4}(1.6-1.4)=1.4919$$

$|x_2-x_1|=0.1081$，不满足精度要求. （11 分）

当 $n=2$ 时，

$$x_3=1.4919-\frac{1.4919-\sin 1.4919-0.5}{1.4919-1.6-\sin 1.4919+\sin 1.6}(1.4919-1.6)=1.4970$$

$|x_3-x_2|=0.0051$,满足精度要求.

所求方程的解为 $x^*\approx 1.4970$ (15 分)

14. $\kappa_1=f(x_k,y_k)=1-y_k$

$$\kappa_2=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_1)=1-y_k-\frac{0.2}{2}\kappa_1=0.9(1-y_k)$$

$$\kappa_3=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_2)=1-y_k-\frac{0.2}{2}\kappa_2=0.91(1-y_k)$$

$$\kappa_4=f(x_k+h,y_k+h\kappa_3)=1-y_k-0.2\kappa_3=0.818(1-y_k) \qquad (5\text{ 分})$$

代入公式 $y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4)$

$$=y_k+\frac{0.2}{6}[1-y_k+2\times 0.9(1-y_k)+2\times 0.91(1-y_k)+0.818(1-y_k)]$$

$$=y_k+0.181(1-y_k)=0.181+0.819y_k \qquad (10\text{ 分})$$

于是有

$$y(0.2)\approx y_1=0.181+0.819\times 0=0.181$$

$$y(0.4)\approx y_2=0.181+0.819\times 0.181=0.329 \qquad (15\text{ 分})$$

四、证明题(本题 10 分)

15. 由该线性方程组的系数矩阵 A 得其雅可比迭代矩阵为

$$B_0=\begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4\text{ 分})$$

求矩阵 B_0 的特征根,解

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0.25 & 0 \\ 0.5 & \lambda & 0.5 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda^2-0.5)-0.25\times 0.5\lambda$$

$$=\lambda(\lambda^2-0.625)=0$$

解得特征根:$\lambda_1=0,\lambda_2=-0.79,\lambda_3=0.79$ (8 分)

因为所有 $|\lambda_k|<1$,由定理 4 可知,该线性方程组的雅可比迭代收敛. (10 分)