试卷代号:1012 **座位号**□□

中央广播电视大学2003—2004学年度第一学期“开放本科”期末考试

计科网专业计算机数学基础(2)试题

2004年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 以下误差限公式不正确的是(　　).

A. $\varepsilon(x_1-x_2)=\varepsilon(x_1)-\varepsilon(x_2)$　　　B. $\varepsilon(x_1+x_2)=\varepsilon(x_1)+\varepsilon(x_2)$

C. $\varepsilon(x_1x_2)=|x_2|\varepsilon(x_1)+|x_1|\varepsilon(x_2)$　　　D. $\varepsilon(x^2)=2|x|\varepsilon(x)$

2. 步长为h的等距节点的插值型求积公式,当$n=2$时的牛顿—科茨求积公式为(　　).

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}[f(a)+f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{4}[f(a)+f(a+\frac{b-a}{4})+f(\frac{a+b}{2})+f(a+3\frac{b-a}{4})]$

3. 已知等距节点的插值型求积公式$\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{3}A_kf(x_k)$,那么$\sum_{k=0}^{3}A_k=$(　　).

A. 1　　　B. 2

C. 3　　　D. 4

4. 用二分法求方程 $f(x)=0$ 在区间$[a,b]$上的根,若给定误差限 ε,则计算二分次数的公式是 $n\geqslant$(　　).

A. $\frac{\ln(b-a)+\ln\varepsilon}{\ln 2}+1$　　　　B. $\frac{\ln(b-a)+\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$

C. $\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}+1$　　　　D. $\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$

5. 若用列主元消去法求解下列线性方程组,其主元必定在系数矩阵主对角线上的方程组是(　　).

A. $\begin{cases}10x_1-x_2+4x_3=0\\2x_1-5x_2+x_3=2\\x_1-x_2+6x_3=-1\end{cases}$　　　　B. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1\\-x_1-5x_2+2x_3=0\\x_1+2x_2+6x_3=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\-x_1-5x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+6x_3=0\end{cases}$　　　　D. $\begin{cases}10x_1-x_2+4x_3=0\\2x_1-5x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 数 $x^*=2.1972246\cdots$的六位有效数字的近似数的绝对误差限是________.

7. 已知函数 $y=f(x)$在点 $x_1=2$ 和 $x_2=5$ 处的函数值分别为 12 和 18,已知 $f'(5)\approx 2$,则 $f'(2)\approx$________.

8. 过 n 对不同数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$的拟合直线 $y=a_1x+a_0$,那么 a_1,a_0 满足的法方程组是________.

9. 已知函数 $f(x)$的函数值 $f(0),f(2),f(3),f(5),f(6)$,以及均差如下

$f(0)=0,f(0,2)=4,f(0,2,3)=5,f(0,2,3,5)=1,f(0,2,3,5,6)=0$

那么由这些数据构造的牛顿插值多项式的最高次幂的系数是________.

10. 解初值问题$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ $(x\in[a,b])$的龙格—库塔法就是求出公式

$y(x_{k+1})-y(x_k)=hf(\zeta_k,y(\zeta_k)),\zeta_k\in[x_k,x_{k+1}],k=0,1,2,\cdots,n-1.$

中的平均斜率 $f(\zeta_k,y(\zeta_k))$,其中 h,x_k 分别是 n 等分$[a,b]$的步长和节点.若用 x_k 点处的斜率近似平均斜率 $f(\zeta_k,y(\zeta_k))$,得到初值问题的数值解的近似公式

$y(x_{k+1})\approx y_{k+1}=y_k+$________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用高斯—赛德尔迭代法求解线性方程组$\begin{cases}5x_1-x_2-x_3-x_4=-4\\-x_1+10x_2-x_3-x_4=12\\-x_1-x_2+5x_3-x_4=8\\-x_1-x_2-x_3+10x_4=34\end{cases}$,已知 $X_0=(0,0,0,0)^T$,求 X_1.计算过程中保留 4 位有效数字.要求写出迭代格式.

12. 已知数值表

x	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.47943	0.56464	0.64422

试用二次插值计算 $f(0.57681)$的近似值,计算过程保留五位小数.(要写出二次插值多项式)

13. 用牛顿法求方程 $x^3-3x-1=0$ 在[1,2]之间的一个近似根,计算保留 6 位有效数字.要求$|x_n-x_{n-1}|\leqslant 0.00005$.取 1 或 2 作为初始值.

14. 用欧拉法解初值问题$\begin{cases}y'=-x+y^2\\y(0)=2\end{cases}$ 在[0,1.5]上的数值解,取 $h=0.5$.计算过程保留5 位小数.(要求写出迭代公式)

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明求积公式$\int_{-2h}^{2h}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{4h}{3}[2f(-h)-f(0)+2f(h)]$具有三次代数精度,其中 h 是正常数.

试卷代号:1012

中央广播电视大学2003—2004学年度第一学期“开放本科”期末考试

计科网专业计算机数学基础(2)试题答案及评分标准

(供参考)

2004年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A　　2. B　　3. C　　4. D　　5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 0.5×10^{-5}

7. 2

8. $$\begin{cases} na_2+a_1\sum\limits_i x_i=\sum\limits_i y_i \\ a_0\sum\limits_i x_i+a_1\sum\limits_i x_i^2=\sum\limits_i x_iy_i \end{cases}$$

9. 1

10. $hf(x_k,y(x_k))$(或)$hf(x_k,y_k)$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+0.2x_4^{(k)}-0.8 \\ x_2^{(k+1)}=0.1x_1^{(k+1)}+0.1x_3^{(k)}+0.1x_4^{(k)}+1.2 \\ x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.2x_2^{(k+1)}+0.2x_4^{(k)}+1.6 \\ x_4^{(k+1)}=0.1x_1^{(k+1)}+0.1x_2^{(k+1)}+0.1x_3^{(k+1)}+3.4 \end{cases}$$ (5分)

$k=0,1,2,\cdots$

因为 $X_0=(0,0,0,0)^T$,即 $x_1^{(0)}=0,x_2^{(0)}=0,x_3^{(0)}=0,x_4^{(0)}=0$,代入迭代格式,求 $X_1^{(1)}$.

$x_1^{(0)}=0.2\times0+0.2\times0+0.2\times0-0.8=-0.8$ (7分)

将 $x_1^{(1)}=-0.8,x_2^{(0)}=0,x_3^{(0)}=0,x_4^{(0)}=0$ 代入迭代格式,求 $x_2^{(1)}$.

$x_2^{(1)}=0.1\times(-0.8)+0.1\times0+0.1\times0+1.2=1.12$ (9分)

将 $x_1^{(1)}=-0.8, x_2^{(1)}=1.12, x_3^{(0)}=0, x_4^{(0)}=0$，求 $x_3^{(1)}$，

$$x_3^{(1)}=0.2\times(-0.8)+0.2\times1.12+0.2\times0+1.6=1.664 \qquad (11\text{ 分})$$

将 $x_1^{(1)}=-0.8, x_2^{(1)}=1.12, x_3^{(1)}=1.664, x_4^{(0)}=0$，求 $x_4^{(1)}$，

$$x_4^{(1)}=0.1\times(-0.8)+0.1\times1.12+0.1\times1.1664+3.4=3.549 \qquad (13\text{ 分})$$

于是，得到

$$X_1=(-0.8,1.12,1.664,3.549)^T \qquad (15\text{ 分})$$

12. 过(0.5,0.47943)，(0.6,0.56464)，(0.7,0.64422)作二次插值多项式

$$P_2(x)=\frac{(x-0.6)(x-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times0.47943+\frac{(x-0.5)(x-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times0.56464$$

$$+\frac{(x-0.5)(x-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times0.64422 \qquad (5\text{ 分})$$

所以

$$f(0.57681)\approx P_2(0.57681)=\frac{(0.57681-0.6)(0.57681-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times0.47943$$

$$+\frac{(0.57681-0.5)(0.57681-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times0.56464$$

$$+\frac{(0.57681-0.5)(0.57681-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times0.64422 \qquad (9\text{ 分})$$

$$=\frac{0.00286}{0.2\times0.1}\times0.47943-\frac{0.00946}{0.1\times0.1}\times0.56464-\frac{0.00178}{0.2\times0.1}\times0.64422$$

$$=0.06856+0.53428-0.05738=0.54546 \qquad (15\text{ 分})$$

13. $f(x)=x^3-3x-1, f(1)=-3<0, f(2)=1>0$

$f'(x)=3x^2-3, f''(x)=12x, f(2)=24>0$，故取 $x=2$ 作初始值. (3 分)

迭代公式为

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3-3x_{n-1}-1}{3x_{n-1}^2-3}\left(\text{或}\frac{2x_{n-1}^3+1}{3(x_{n-1}^2-1)}\right), n=1,2,\cdots \qquad (6\text{ 分})$$

$$x_0=2, x_1=\frac{2\times2^3+1}{3\times(2^2-1)}=1.88889$$

$$x_2=\frac{2\times1.88889^3+1}{3\times(1.88889^2-1)}=1.87945 \qquad |x_2-x_1|=0.00944$$

$x_3=\frac{2\times1.87945^3+1}{3\times(1.87945^2-1)}=1.87939$　　$|x_3-x_2|=0.00006$　　(11 分

$x_4=\frac{2\times1.87939^3+1}{3\times(1.87939^2-1)}=1.87939$　　$|x_4-x_3|=0.00001$

方程的根 $x^*\approx1.87939$.　　(15 分

14. 欧拉法的公式为

$y(x_k)\approx y_k=y_{k-1}+hf(x_{k-1},y_{k-1}=y_{k-1}+h(-x_{k-1}+y_{k-1}^2),k=1,2,3,4$　　(4 分

已知 $x_0=0,y_0=2$,

$y(0.5)\approx y_1=2+0.5\times(-0+2^2)=4$　　(8 分

$y(1)\approx y_2=4+0.5\times(-0.5+4^2)=11.75$　　(12 分

$y(1.5)\approx y_3=11.75+0.5\times(-1+11.75^2)=80.28125$　　(15 分

注:不写公式扣 4 分

四、证明题(本题 10 分)

15. (1)当 $f(x)=1$ 时,

左边$=4h=\frac{4h}{3}[2-1+2]=$右边　　(2 分)

(2)当 $f(x)=x$ 时,左边$=0=\frac{4h}{3}[2\times(-h)-1\times0+2\times h]=$右边　　(4 分)

(3)当 $f(x)=x^2$ 时,　　左边$=\frac{16h^3}{3}=\frac{4h}{3}[2\times(-h)^2-1\times0+2\times h^2]=$右边

(4)当 $f(x)=x^3$ 时,左边$=0=\frac{4h}{3}[2(-h)^3-0+2\times h^3]=$右边

(5)当 $f(x)=x^4$ 时,

左边$=\frac{64h^5}{5}$,右边$=\frac{4h}{3}[2\times(-h)^4-0+2\times h^4]=\frac{16h^5}{3}\neq$左边　　(8 分)

所以,该求积公式具有三次代数精度.　　(10 分)