学　号
姓　名
分校(工作站)

密封线内不要答题

试卷代号:1012　　　　座位号

中央广播电视大学2003—2004学年度第二学期“开放本科”期末考试

计科网络
计科应用专业　计算机数学基础(2)　试题
计科硬件

2004年7月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 已知准确值x^*与其有t位有效数字的近似值$x=0.0a_1a_2\ldots a_n\times 10^s(a_1\neq 0)$的绝对误差$|x^*-x|\leq$(　　).

A. $0.5\times 10^{s-1-t}$　　B. $0.5\times 10^{s-t}$

C. $0.5\times 10^{s+1-t}$　　D. $0.5\times 10^{s+t}$

2. 以下矩阵是严格对角占优矩阵的为(　　).

A. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. 过(0,1),(2,4),(3,1)点的分段线性插值函数$P(x)=$(　　).

A. $\begin{cases} \frac{3}{2}x+1 & 0\leq x\leq 2 \\ -3x+10 & 2<x\leq 3 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} \frac{3}{2}x+1 & 0\leq x\leq 2 \\ -3x^2+10 & 2<x\leq 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \frac{3}{2}x-1 & 0\leq x\leq 2 \\ -3x+10 & 2<x\leq 3 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} \frac{3}{2}x+1 & 0\leq x\leq 2 \\ -x+4 & 2<x\leq 3 \end{cases}$

4. 等距二点的求导公式是(　　).

A. $\begin{cases} f'(x_k)=\frac{1}{h}(-y_k+y_{k+1}) \\ f'(x_{k+1})=\frac{1}{h}(y_k-y_{k+1}) \end{cases}$　　B. $\begin{cases} f'(x_k)=\frac{1}{h}(y_k-y_{k+1}) \\ f'(x_{k+1})=\frac{1}{h}(y_k-y_{k+1}) \end{cases}$

C. $\begin{cases} f'(x_k)=\frac{1}{h}(-y_k+y_{k+1}) \\ f'(x_{k+1})=\frac{1}{h}(y_{k+1}-y_k) \end{cases}$　　D. $\begin{cases} f'(x_k)=\frac{1}{h}(-y_k+y_{k+1}) \\ f'(x_{k+1})=\frac{1}{h}(y_k+y_{k+1}) \end{cases}$

5. 解常微分方程初值问题的平均形式的改进欧拉法公式是

$$y_{k+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c)$$

那么 y_p, y_c 分别为(　　).

A. $\begin{cases} y_p=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_c=y_k+hf(x_{k+1},y_k) \end{cases}$　　B. $\begin{cases} y_p=y_k+hf(x_{k+1},y_k) \\ y_c=y_k+hf(x_k,y_p) \end{cases}$

C. $\begin{cases} y_p=y_k+f(x_k,y_k) \\ y_c=y_k+f(x_k,y_p) \end{cases}$　　D. $\begin{cases} y_p=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_c=y_k+hf(x_{k+1},y_p) \end{cases}$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设近似值 x_1, x_2 满足 $\varepsilon(x_1)=0.05$, $\varepsilon(x_2)=0.05$, 那么 $\varepsilon(x_1, x_2)=$

____________.

7. 三次样条函数 $S(x)$ 满足:$S(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内二阶连续可导,$S(x_k)=y_k$(已知),$k=0,1,2,...,n$,且满足 $S(x)$ 在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上是____________.

8. 牛顿——科茨求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$,则 $\sum_{k=0}^{n} A_k=$ ________.

9. 解方程 $f(x)=0$ 的简单迭代法的迭代函数 $\varphi(x)$ 满足在有根区间内____________,则在有根区间内任意取一点作为初始值,迭代解都收敛.

10. 解常微分方程初值问题的改进欧拉法预报——校正公式是预报值:

$\bar{y}_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$,校正值:$y_{k+1}=$____________________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用简单迭代法求线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1-3x_2+2x_3=20 \\ 4x_1+11x_2-x_3=33 \\ 6x_1+3x_2+12x_3=36 \end{cases}$$

的 $X^{(3)}$. 取初始值$(0,0,0)^T$,计算过程保留 4 位小数.

12. 已知函数值 $f(0)=6, f(1)=10, f(3)=46, f(4)=82, f(6)=212$,求函数的四阶均差 $f(0,1,3,4,6)$ 和二阶均差 $f(4,1,3)$.

密封线内不要答题

13. 将积分区间 8 等分，用梯形求积公式计算定积分$\int^{3} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$，计算过程保留 4 位小数.

14. 用牛顿法求 $\sqrt{115}$ 的近似值，取 $x=10$ 或 11 为初始值，计算过程保留 4 位小数．

得 分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明求常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

在等距节点 $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ 处的数值解近似值的梯形公式为

$$y(x_{k+1})\approx y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$$

其中 $h=x_{k+1}-x_k(k=0,1,2,\dots n-1)$.

试卷代号:1012

中央广播电视大学2003—2004学年度第二学期“开放本科”期末考试

计科网络
计科应用专业　计算机数学基础(2)
计科硬件

试题答案及评分标准

(供参考)

2004年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A　　2. B　　3. A　　4. C　　5. D

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $0.05|x_2|+0.005|x_1|$

7. 3次多项式

8. $b-a$

9. $|\varphi'(x)|\leq r\leq 1$

10. $y_k+hf(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 写出迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0+0.375x_2^{(k)}-0.25x_3^{(k)}+2.5 \\ x_2^{(k+1)}=-0.3636x_1^{(k)}+0+0.0909x_3^{(k)}+3 \\ x_3^{(k+1)}=-0.5x_1^{(k)}-0.25x_2^{(k)}+0+3 \end{cases}$$ (5分)

$X^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=0+0.375\times 0-0.25\times 0+2.5=2.5 \\ x_2^{(1)}=-0.3636\times 0+0+0.0909\times 0+3=3 \\ x_3^{(1)}=-0.5\times 0-0.25\times 0+0+3=3 \end{cases}$$

得到 $X^{(1)}=(2.5,3,3)^{\mathrm{T}}$ (9分)

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0+0.375\times 3-0.25\times 3+2.5=2.875 \\ x_2^{(2)}=-0.3636\times 2.5+0+0.0909\times 3+3=2.3637 \\ x_3^{(2)}=-0.5\times 2.5-0.25\times 3+0+3=1.0000 \end{cases}$$

得到 $X^{(2)}=(2.875,2.3637,1.0000)^T$ （12 分）

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=0+0.375\times2.3637-0.25\times1+2.5=3.1364 \\ x_2^{(3)}=-0.3636\times2.875+0+0.0909\times1+3=2.0456 \\ x_3^{(3)}=-0.5\times2.875-0.25\times2.3637+0+3=0.9716 \end{cases}$$

得到 $X^{(3)}=(3.1364,2.0456,0.9716)^T$ （15 分）

12. 计算均差列表给出．

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
0	6				
1	10	4			
3	46	18	14/3		
4	82	36	6	1/3	
6	212	65	29/3	11/15	1/15

（10 分）

$f(0,1,3,4,6)=\dfrac{1}{15}$ （12 分）

$f(4,1,3)=6$ （15 分）

13. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，$h=\dfrac{2}{8}=0.25$．分点 $x_0=1.0$，$x_1=1.25$，$x_2=1.5$，$x_3=1.75$，$x_4=2.0$，$x_5=2.25$，$x_6=2.50$，$x_7=2.75$，$x_8=3.0$．

函数值：$f(1.0)=1.4142$，$f(1.25)=1.6008$，$f(1.5)=1.8028$，$f(1.75)=2.0156$，$f(2.0)=2.2361$，$f(2.25)=2.4622)$，$f(2.50)=2.6926$，$f(2.75)=2.9262$，$f(3.0)=3.1623$． （6 分）

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_8)+2(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7))]$$ （9 分）

$$=\frac{0.25}{2}\times[1.4142+3.1623+2\times(1.6008+1.8028+2.0156+2.2361+2.4622+2.6926+2.9262)]$$

$$=0.125\times(4.5765+2\times15.7361)=4.5061$$ （15 分）

14. 设 x 为所求，即求 $x^2-115=0$ 的正根．$f(x)=x^2-115$.

因为 $f'(x)=2x, f''(x)=2, f(10)f''(10)=(100-115)\times 2<0, f(11)f''(11)$

$=(121-115)\times 2>0$

取 $x_0=11$.

有迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2-115}{2x_k}=\frac{x_k}{2}+\frac{115}{2x_k}(k=0,1,2,\cdots)$$

$$x_1=\frac{11}{2}+\frac{115}{2\times 11}=10.727\ 3$$

$$x_2=\frac{10.727\ 3}{2}+\frac{115}{2\times 10.727\ 3}=10.723\ 8$$

$$x_3=\frac{10.723\ 8}{2}+\frac{10.723\ 8^2-115}{2\times 10.723\ 8}=10.723\ 8$$

$$x^*\approx 10.723\ 8$$

四、证明题(本题 10 分)

15. 在子区间$[x_{k+1},x_k]$上，对微分方程两边关于 x 积分，得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x \qquad (5\text{ 分})$$

用求积梯形公式，有

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\frac{h}{2}[f(x_k,y(x_k))+f(x_{k+1},y(x_{k+1}))] \qquad (8\text{ 分})$$

将 $y(x_k),y(x_{k+1})$用 y_k,y_{k+1}替代，得到

$$y(x_{k+1})\approx y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})](k=0,1,2,...,n-1) \qquad (10\text{ 分})$$