试卷代号:1012 **座位号**□□

中央广播电视大学2004—2005学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机专业　计算机数学基础(2)　试题

2005年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设近似值 $x=\pm 0.a_1a_2\ldots a_n\times 10^m$,具有 l 位有效数字,则其相对误差限不超过(　　).

A. $\dfrac{1}{2a_1+1}\times 10^{-l+1}$　　B. $\dfrac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-l+1}$

C. $\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{-l+1}$　　D. $\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{-l}$

2. 以下命题正确的是(　　).

A. 过 $n+1$ 个互异节点的牛顿插值多项式最高次幂的系数为 $f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$(此项不为0时)

B. 过节点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)(n>3)$,则均差 $f(x_3,x_0,x_4)\neq f(x_4,x_0,x_3)$

C. 过 $n+1$ 个互异节点的拉格朗日插值多项式一定是 n 次多项式

D. 三次样条函数 $S(x)$ 在每个子区间上是不超过3次的多项式

3. 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$,若(　　),则称该公式具有 m 次代数精度.

A. 对于 m 次多项式该公式精确成立,$m+1$ 次多项式不成立

B. 对于大于 m 次多项式该公式精确成立,m 次多项式不成立

C. 对于小于 m 次多项式该公式精确成立,大于 m 次多项式不成立

D. 对于不超过 m 次多项式该公式精确成立,有 $m+1$ 次多项式不成立

4. 将积分区间[0,0.5]四等分，有科茨求积公式，它的科茨系数为

$$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},C_1^{(4)}=\frac{32}{90}$$

那么用科茨求积公式计算定积分 $\int_0^{0.5} f(x)\mathrm{d}x$ 中的系数 $A_3=$ (　　).

A. $\frac{32}{90}$　　　　B. $\frac{16}{90}$

C. $\frac{4}{90}$　　　　D. $\frac{12}{90}$

5. 解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的三阶龙格——库塔法的局部截断误差是 (　　).

A. $O(h^2)$　　　　B. $O(h^3)$

C. $O(h^4)$　　　　D. $O(h^5)$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

6. 用四舍五入的方法得到近似值 $x=0.0514$，那么 x 的绝对误差限和相对误差限分别为________________.

7. 用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=5 \\ 5x_1-x_2+x_3=8 \\ x_1-3x_2-4x_3=-4 \end{cases}$$

第 1 次选主元 $a_{21}=5$ 进行消元后，第 2 次应选主元________.

8. 已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$ 那么用线性插值求 $\sqrt{110}$ 的近似值的计算公式为________________.(只要求写出公式，不写公式不得分)

9. 已知函数值 $g(1)=1,g(2)=4,g(3)=9$，以及等距三点求导公式：

$$f'(x_{k-1})=\frac{1}{2h}[-3y_{k-1}+4y_k-y_{k+1}],$$

$$f'(x_k)=\frac{1}{2h}[-y_{k-1}+y_{k+1}],$$

$$f'(x_{k-1})=\frac{1}{2h}[y_{k-1}-4y_k+3y_{k+1}],$$

那么，$g'(2)\approx$________.

10. 高斯——勒让德求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(x_0)+f(x_1)$，那么节点 x_0,x_1 分别为________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用高斯——赛德尔迭代法求线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_1+3x_2+10x_3=14 \end{cases}$$

的 $X^{(2)}$. 初始值取 $(0,0,0)^T$,计算过程保留 4 位小数.

12. 测得铜导线在温度 t_k 时的电阻 R_k 的数据如表. 试求电阻 R 与温度 t 的线性近似表达式. 计算过程中保留 3 位小数.

t_k	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0
R_k	76.30	77.80	79.25	80.80	82.35

13. 用牛顿法求方程 $xe^x-1=0$ 在[0.5,0.6]之间的一个近似根,初始值取 0.5 或 0.6 之一. 满足 $|x_{k+1}-x_k|\le 0.001$,计算过程保留 5 位小数.

14. 用平均形式的改进欧拉法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=x-y+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取 $h=0.2$,求 $x=0.2,0.4$ 时的数值解. 计算过程保留 6 位小数.

提示:$y_p=y_k+h\cdot f(x_k,y_k)$

$$y_c=y_k+hf(x_{k+1},y_p)$$

$$y_{k+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c)\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明将求积区间[1,3]二等分,所得到的牛顿——科茨求积公式

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(1) + A_1 f(2) + A_2 f(3)$$

中的系数 $A_0=\frac{1}{3}=A_2, A_1=\frac{4}{3}$.

试卷代号：1012

中央广播电视大学2004—2005学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机专业　计算机数学基础(2)　试题答案及评分标准

（供参考）

2005年1月

一、单项选择题(每小题3分，共15分)

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. C

二、填空题(每小题3分，共15分)

6. 0.00005，0.001

7. −2.8

8. $\frac{110-121}{100-121}\times 10+\frac{110-100}{121-100}\times 11$

9. 4

10. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

三、计算题(每小题15分，共60分)

11. 写出迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0-0.3x_2^{(k)}-0.1x_3^{(k)}+1.4 \\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0+0.3x_3^{(k)}+0.5 \\ x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k+1)}-0.3x_2^{(k+1)}+0+1.4 \end{cases}$$ (5分)

$X^{(0)}=(0,0,0)^T$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=0-0.3\times 0-0.1\times 0+1.4=1.4 \\ x_2^{(1)}=0.2\times 1.4+0+0.3\times 0+0.5=0.78 \\ x_3^{(1)}=-0.1\times 1.4-0.3\times 0.78+0+1.4=1.026 \end{cases}$$

得到 $X^{(1)}=(1.4,0.78,1.026)^T$ (10分)

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0-0.3\times 0.78-0.1\times 1.026+1.4=1.063\,4 \\ x_2^{(2)}=0.2\times 1.063\,4+0+0.3\times 1.026+0.5=1.020\,5 \\ x_3^{(2)}=-0.1\times 1.063\,4-0.3\times 1.020\,5+0+1.4=0.987\,5 \end{cases}$$

得到 $X^{(2)}=(1.0634,1.0205,0.9875)^{T}$ (15 分)

12. $n=5$，计算列表

k	t_k	R_k	t_k^2	t_kR_k
1	19.1	76.30	364.81	1457.33
2	25.0	77.80	625.0	1945.0
3	30.1	79.25	906.01	2385.425
4	36.0	80.80	1296.0	2908.8
5	40.0	82.35	1600.0	3294.0
Σ	150.2	396.5	4791.82	11990.555

法方程组为

$$\begin{cases}5a_0+150.2a_1=396.5\\150.2a_0+4\,791.82a_1=11\,990.555\end{cases}$$ (10 分)

解得

$$a_0=70.739$$

$$a_1=0.285$$

所求线性方程为 $R=70.739+0.285t$ (15 分)

13. $f(x)=xe^x-1$，因为 $f'(x)=e^x+xe^x$，$f''(x)=e^x(2+x)$，

$f(0.5)f''(0.5)=(0.5e^{0.5}-1)e^{0.5}(2+0.5)<0$，

$f(0.6)f''(0.6)=(0.6e^{0.6}-1)e^{0.6}(2+0.6)>0$

取 $x_0=0.6$. 牛顿法迭代公式 (5 分)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}\ (k=0,1,2,\dots)$$ (10 分)

$$x_1=0.6-\frac{0.6-e^{-0.6}}{1+0.6}=0.568\,01$$

$$x_2=0.568\,01-\frac{0.568\,01-e^{-0.568\,01}}{1+0.568\,01}=0.567\,14$$

$$x_3=0.567\,14-\frac{0.567\,14-e^{-0.567\,14}}{1+0.567\,14}=0.567\,14$$

$x^*\approx0.567\,14$ (15 分)

14. 公式为

$$\begin{cases} y_p = y_k + hf(x,y) = y_k + 0.2(x_k - y_k + 1) = 0.8y_k + 0.2x_k + 0.2 \\ y_c = y_k + hf(x_{k+1}, y_p) = y_k + 0.2(x_{k+1} - y_p + 1) \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases} \quad (5\text{分})$$

当 $k=0$ 时．$x_0=0, x_1=0.2$

$$\begin{cases} y_p = 0.8\times1+0.2\times0+0.2=1 \\ y_c = 1+0.2\times(0.2-1+1)=1.04 \\ y_1 = \frac{1}{2}(1+1.04)=1.02 \end{cases} \quad (10\text{分})$$

当 $k=1$ 时，$x_1=0.2, x_2=0.4$

$$\begin{cases} y_p = 0.8\times1.02+0.2\times0.2+0.2=1.056 \\ y_c = 1.02+0.2\times(0.4-1.056+1)=1.088\,8 \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(1.056+1.088\,8)=1.072\,4 \end{cases}$$

得到 $y(0.2)\approx1.02, y(0.4)\approx1.0724$ (15 分)

四、证明题(本题 10 分)

15. 将$[1,3]$二等分，节点为 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$. 过节点 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$ 作插值多项式

$$P_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}f(1)+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}f(2)+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}f(3) \quad (4\text{分})$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-5x+6)f(1)-(x^2-4x+3)f(2)+\frac{1}{2}(x^2-3x+2)f(3)$$

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \approx \int_1^3 P_2(x)\mathrm{d}x \quad (8\text{分})$$

$$=\int_1^3 \left[\frac{1}{2}(x^2-5x+6)f(1)-(x^2-4x+3)f(2)+\frac{1}{2}(x^2-3x+2)f(3)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}f(1)+\frac{4}{3}f(2)+\frac{1}{3}f(3)$$

所以有 $A_0=\frac{1}{3}=A_2, A_1=\frac{4}{3}$. (10 分)