试卷代号：1012　　　　座位号□□

中央广播电视大学2004—2005学年度第二学期“开放本科”期末考试

计算机专业　计算机数学基础(2)　试题

2005年7月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分，共15分)

1. 若近似值 x 的绝对误差限为 $\varepsilon=0.5\times10^{-2}$，那么以下有4位有效数字的 x 值是(　　).

A. 0.9344　　B. 9.344

C. 93.44　　D. 934.4

2. 用高斯——赛德尔迭代法解线性方程组 $AX=b$，假设已知 $\tilde{L},\tilde{U},D$. 则高斯——赛德尔迭代矩阵 $G=$(　　).

A. $-(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U}$　　B. $(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U}$

C. $-D^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})$　　D. $D^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})$

3. 已知 $n+1$ 个互异节点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ 和过这些点的拉格朗日插值基函数 $l_k(x)(k=0,1,2,\ldots,n)$，且 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. 则 $f(x_0,x_1,\ldots,x_n)=$(　　).

A. $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$　　B. $\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{l'_k(x_k)}$

C. $\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\omega(x_k)}$　　D. $\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\omega'(x_k)}$

4. 梯形求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 具有(　　)次的代数精度.

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

5. 用牛顿法求方程 $f(x)=0$ 的近似根,选择初始值 x_0 应满足(　　).

A. $f'(x_0)f(x_0)<0$　　　　B. $f'(x_0)f(x_0)>0$

C. $f''(x_0)f(x_0)<0$　　　　D. $f''(x_0)f(x_0)>0$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 测量长度为 $x=10\text{cm}$ 的正立方体,若 $\varepsilon(x)=0.05\text{cm}$,则该正立方体的体积 V 的绝对误差限 $\varepsilon(V)=$________ cm^3.

7. 已知四对互异节点 (x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) 以及各阶均差 $f(x_0)=12$,$f(x_0,x_1)=-2$,$f(x_0,x_1,x_2)=3$,$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=0$. 则过这些点的牛顿插值多项式 $N(x)$ =________________________________.

8. 已知函数值 $f(0.7)=0.343$,$f(1.1)=1.331$,$f(1.5)=3.375$,用抛物线求积公式计算定积分 $\int_{0.7}^{1.5} f(x)\mathrm{d}x$,那么 $\int_{0.7}^{1.5} f(x)\mathrm{d}x \approx$ ________.

9. 用二分法求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间[2,3]内的实根,取区间中点 $x_0=2.5$,那么下一个有根区间是________________.

10. 解初值问题的四阶龙格——库塔法的计算公式用斜率 $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4$ 表示为 $y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}$(____________________________).

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=5 \\ 3x_1+4x_2+7x_3=6 \\ x_1+3x_2+3x_3=5 \end{cases}$$

(计算过程保留 3 位小数)。

12. 已知数据表

x_k	10	11	12	13
$f(x_k)$	2.302 6	2.397 9	2.484 9	2.564 9

试用二次插值计算 $f(11.75)$(计算过程保留 4 位小数). 并回答用线性插值计算 $f(11.75)$,应取哪两个点较好?

13. (1)用四个节点的高斯——勒让德求积公式计算定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$,计算过程保留 4 位小数.

(节点和系数分别为 $x_{0,3}=\pm 0.861136$, $A_{0,3}=0.347855$; $x_{1,2}=\pm 0.339981$, $A_{1,2}=0.652145$)

(2)若用高斯——勒让德求积公式计算定积分 $\int_{0}^{1}f(x)\,dx$,需要如何变换?

14. 用欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} y'=x-y+1 \quad 0\le x\le 0.4 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

的数值解,取 $h=0.1$. 并将计算结果与精确解 $y(x)=x+e^{-x}$ 进行比较.

计算过程保留 3 位小数.

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明用简单迭代法求方程 $x=4-2^x$ 在区间[1,2]内的实根,迭代解是收敛的.

试卷代号:1012

中央广播电视大学2004—2005学年度第二学期“开放本科”期末考试

计算机专业　计算机数学基础(2)

试题答案及评分标准

(供参考)

2005年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. D

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 15

7. $12-2(x-x_0)+3(x-x_0)(x-x_1)$

8. 1.206

9. [2,2.5]

10. $(\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4)$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11. $[A\vdots B]=\begin{bmatrix}2&3&5&5\\3&4&7&6\\1&3&3&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}3&4&7&6\\2&3&5&5\\1&3&3&5\end{bmatrix}$

$\longrightarrow\begin{bmatrix}3&4&7&6\\0&0.333&0.333&1\\0&1.667&0.667&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}3&4&7&6\\0&1.667&0.667&3\\0&0.333&0.333&1\end{bmatrix}$

$\longrightarrow\begin{bmatrix}3&4&7&6\\0&1.667&0.667&3\\0&0&0.200&0.401\end{bmatrix}$　　(9分)

$x_3=2.005, x_2=(3-0.667\times2.005)/1.667=0.997$　　(13分)

$x_1=(6-7\times2.005-4\times0.997)/3=-4.008$

原方程组的解 $X=(-4.008,0.997,2.005)^T$ (15 分)

12. 因为 11.75 更接近 12,故应取 11,12,13 三点作二次插值.

$$P_2(x)=\frac{(x-12)(x-13)}{2}\times 2.3979-\frac{(x-11)(x-13)}{1}\times 2.4849$$

$$+\frac{(x-11)(x-12)}{2}\times 2.5649 \qquad (6\text{ 分})$$

$$f(11.75)\approx P_2(11.75)=\frac{(11.75-12)(11.75-13)}{2}\times 2.3979$$

$$-\frac{(11.75-11)(11.5-13)}{1}\times 2.4849$$

$$+\frac{(11.75-11)(11.75-12)}{2}\times 2.5649$$

$$=2.4638 \qquad (12\text{ 分})$$

若用线性插值,应取 $x=11,x=12$ 作线性插值合适. (15 分)

注:若取 $x=10,11,12$ 三点作插值计算正确,可得 9 分。若计算有误,可适当扣分。

13.(1)由高斯——勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx=[0.3479\times(\sqrt{1-0.8611}+\sqrt{1+0.8611})$$

$$+0.6521\times(\sqrt{1-0.3400}+\sqrt{1+0.3400})] \qquad (6\text{ 分})$$

$$=0.3479\times 1.7369+0.6521\times 1.9700=1.8889 \qquad (12\text{ 分})$$

(2)高斯——勒让德求积公式只限于积分区间是[−1,1]上的积分计算,要计算[0,1]上的积分,需作变换

$$x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}$$

将[0,1]变换为[−1,1].

于是 $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}f(\frac{t}{2}+\frac{1}{2})dt.$ (15 分)

14. $f(x,y)=x-y+1,h=0.1$,有计算公式

$y_{k+1}=y_k+0.1\times(x_k-y_k+1)=0.1+0.1x_k+0.9y_k\quad(k=0,1,2,3)$

当 $k=0$ 时,$y_1=0.1+0.1\times 0+0.9\times 1=1,y(0.1)=0.1+e^{-0.1}=1.005.\ |y_1-y(0.1)|$

$=0.005$ (4 分)

当 $k=1$ 时,$y_2=0.1+0.1\times 0.1+0.9\times 1=1.01,y(0.2)=0.2+e^{-0.2}=1.018.$

$|y_3-y(0.2)|=0.008$ （8 分）

当 $k=2$ 时，$y_3=0.1+0.1\times0.2+0.9\times1.01=1.029$，$y(0.3)=0.3+e^{-0.3}=1.041$.

$|y_3-y(0.3)|=0.012$ （12 分）

当 $k=3$ 时，$y_4=0.1+0.1\times0.3+0.9\times1.029=1.056$，$y(0.4)=0.4+e^{-0.4}=1.070$.

$|y_4-y(0.4)|=0.014$ （15 分）

可以看出，越远离初始值点 $x=0$，误差越大。

四、证明题（本题 10 分）

15. $f(x)=x-4+2^x$，

取迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{\ln(4-x)}{\ln2}$ （5 分）

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{4-x}\cdot\frac{1}{\ln2}$$

当 $x\in[1,2]$时，$|\varphi'(x)|=\left|\dfrac{1}{4-x}\right|\cdot\dfrac{1}{\ln2}\leq\dfrac{1}{4-2}\cdot\dfrac{1}{\ln2}=\dfrac{1}{2\ln2}<1$

所以，用迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{1}{4-x_k}\cdot\frac{1}{\ln2}(k=0,1,2...)$$

在[1,2]内取任意一点为初始值，迭代解都收敛. （10 分）

注：若取 $\varphi(x)=4-2^x$，$|\varphi'(x)|=2^x\ln x>1$，$x\in[1,2]$.