试卷代号:1012 **座位号**

中央广播电视大学2005—2006学年度第一学期"开放本科"期末考试

计算机专业 计算机数学基础(2) 试题

2006年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. $\pi=3.141592653\cdots$的五位有效数字,它的绝对误差限是π的左起第五位的半个单位,即绝对误差限是(   ).

A. 0.000 5

B. 0.000 005

C. 0.000 05

D. 0.000 000 5

2. 设$f(x)=\frac{1}{a-x}$,x_0,x_1,x_2是异于a的三个互异节点,则$f(x_0,x_1,x_2)=$(   ).

A. $\frac{1}{a-x_0}$

B. $\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)(a-x_2)}$

C. $\frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}$

D. $\frac{1}{(x_0-a)(x_1-a)(x_2-a)}$

3. 已知函数值$f(0)=1,f(1)=0.5,f(2)=0.2$,则$f(x)$的分段线性插值函数$P(x)=$(   ).

A. $\begin{cases} 1-0.5x^2 & x\in[0,1] \\ 0.8-0.3x & x\in[1,2] \end{cases}$

B. $\begin{cases} 1-0.5x & x\in[0,1] \\ 0.5-0.3x & x\in[1,2] \end{cases}$

C. $\begin{cases} 1-x & x\in[0,1] \\ 0.8-0.3x & x\in[1,2] \end{cases}$

D. $\begin{cases} 1-0.5x & x\in[0,1] \\ 0.8-0.3x & x\in[1,2] \end{cases}$

4. 用简单迭代法解方程 $x=\varphi(x)$（$\varphi(x)$称为迭代函数），迭代函数 $\varphi(x)$在有根区间满足（　　），则在有根区间内任取初始值 x_0，用公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$（$n=0,1,2,\cdots$）所得的解序列收敛.

A. $|\varphi'(x)|\leqslant r<1$　　　　$<r<1$

C. $|\varphi'(x)|\leqslant 1$　　　　D. $|\varphi'(x)|<1$

5. 设高斯型求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，若已知有4个节点，那么此时求积公式是（　　）次代数精度.

A. 5　　　　B. 6

C. 7　　　　D. 9

得　分	评卷人

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $x=1.7321$ 是 $\sqrt{3}$ 的有五位有效数字的近似值，那么 x 的相对误差限 ε_r ____________________.

7. 过三个互异节点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2)的二次插值多项式 $P_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$ 中插值基函数 $l_1(x)$的计算公式 $l_1(x)=$ ____________________.

8. 求初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 在等距节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 处的数值解的改进欧拉法预报一校正公式是 $y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+$ ____________________ $]$.

9. 已知 $n=5$ 的科茨系数 $C_0^{(5)}=\frac{19}{288}$，$C_1^{(5)}=\frac{75}{288}$，则 $C_3^{(5)}=$ ________________.

10. 设线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 1 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & 1 \end{bmatrix}$ 那么雅可比迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_0=$ _________________________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用列主元消去法解线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-2 \\ -2x_1+x_2-x_3=2 \\ 4x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$计算过程保留 4 位小数.

12. 确定求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)$

中的参数 A,B,C,使其代数精度尽量高,并用你所得求积公式计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$(计算过程保留 4 位小数)

13. 用弦截法求方程 $2e^{-x}-\sin x=0$ 在 $x=1$ 附近的根的近似值,计算过程保留 4 位小数,要求

$|x_{n+1}-x_n|\leqslant 0.002$,已知 $e^{-1}=0.3679$,$\sin 1=0.8415$

14. 用四阶龙格—库塔法求解初值问题$\begin{cases} y'=x-y+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$,由 $y(0)=1$ 已经计算得 $x=0.4$ 时,$y(0.4)\approx 1.0704$,求 $x=0.8$ 处的数值解.计算过程保留 4 位小数.已知四阶龙格—库塔法公式为 $\kappa_1=f(x_k,y_k)$　　$\kappa_2=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_1)$　　$\kappa_3=f(x_k+\frac{1}{2}h,y_k+\frac{h}{2}\kappa_2)$　　$\kappa_4=f(x_k+h,y_k+h\kappa_3)$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4)$$

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明　已知一组数据$(x_k,y_k)(k=1,2,\cdots,n)$,若用直线 $\hat{y}=a_1x+a_0$ 拟合这组数据,要求误差平方和最小,试推导 a_1,a_0 满足的法方程组.

试卷代号:1012

中央广播电视大学2005—2006学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机专业 计算机数学基础(2) 试题答案及评分标准

(供参考)

2006年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. C　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $\leqslant 0.5\times 10^{-4}$

7. $\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

8. $f(x_{k+1}, y_k+hf(x_k, y_k))$

9. $\dfrac{50}{288}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & -0.75 & -0.75 \\ -0.75 & 0 & -0.75 \\ -0.75 & -0.75 & 0 \end{bmatrix}$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 写出增广矩阵 $[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (4分)

第一次选主元 $a_{31}=4$,换行得:$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

消元,第1行分别乘1/2和$-1/4$,加到第2,3行上,得到 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & -1.75 \end{bmatrix}$ (9分)

第二次选主元 $a_{32}=-0.75$，做第 2,3 行互换，得到 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & -1.75 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$

第 2 行的 0.5/0.75 倍加到第 3 行上，得到

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3333 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$ （13 分）

系数矩阵已经是上角形矩阵，消元终止.

回代求解，

$$\begin{cases} x_3=0.3333/1=0.3333 \\ x_2=(-1.75-1.5\times 0.3333)/(-0.75)=2.9999 \text{或} \\ x_1=(-1-2\times 0.3333+2.9999)/4=0.3333 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=1/3 \\ x_2=(-1.75-1.5\times 1/3)/(-0.75)=3 \\ x_1=(-1-2\times 1/3+3)/4=1/3 \end{cases}$$

方组的解为 $X=(0.3333,2.9999,0.3333)^T$ 或 $(1/3,3,1/3)^T$. （15 分）

12. 由代数精度定义，因为有三个参数，用 $f(x)=1,x,x^2$ 代入求积公式，得到

$$\begin{cases} 2=A+B+C \\ 0=-A+C \\ \dfrac{2}{3}=A+C \end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=\frac{4}{3},C=\frac{1}{3}$，

求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$ （8 分）

计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x, f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}\times\sqrt{1+(-1)^2}+\frac{4}{3}\times\sqrt{1+0}+\frac{1}{3}\times\sqrt{1+1}=2.2761 \quad (15\text{ 分})$$

13. $f(x)=2e^{-x}-\sin x, f(0)=2>0, f(1)=-0.1057<0$

$f(x)=0$ 的有根区间是$[0,1]$.弦截法的公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1}), n=1,3,\cdots \quad (5\text{ 分})$$

取 $x_0=0, x_1=1$,有

$$x_2=1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(1-0)=1-\frac{-0.1057}{-0.1057-2}\times 1=0.9498 \quad (8\text{ 分})$$

$$f(0.9498)=2e^{-0.9498}-\sin 0.9498=-0.0397$$

$$x_3=0.9498-\frac{-0.0397}{-0.0397+0.1057}\times(0.9498-1)=0.9196 \quad (11\text{ 分})$$

$$|0.9498-0.9196|\leqslant 0.0302$$

$$f(0.9196)=2e^{-0.9196}-\sin 0.9196=0.0020$$

$$x_4=0.9196-\frac{0.0020}{0.0020+0.0397}\times(0.9196-0.9498)=0.9210 \quad (14\text{ 分})$$

$$|0.9108-0.9210|\leqslant 0.0014<0.002$$

所求根 $x^*\approx 0.9210$ (15 分)

14. $h=0.4, x_0=0, y_0=1$, $\kappa_1=x_k-y_k+1$ $\kappa_2=x_k+0.2-y_k-0.2\kappa_1+1$

$\kappa_3=x_k+0.2-y_k-0.2\kappa_2+1$ $\kappa_4=x_k+0.4-y_k-0.4\kappa_3+1$ (5 分)

$x_1=0.4, y_1=1.0704$,求当 $x_2=0.8$ 时,y_2 的值

$\kappa_1=x_k-y_k+1=0.4-1.0704+1=0.3296$ (7 分)

$\kappa_2=x_k+0.2-y_k-0.2\kappa_1+1=0.4637$, $\kappa_3=x_k+0.2-y_k-0.2\kappa_2+1=0.4369$ (11 分)

$\kappa_4=x_k+0.4-y_k-0.4\kappa_3+1=0.5548$ (13 分)

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4)$$

$$=1.0704+\frac{0.4}{6}(0.3296+2\times 0.4637+2\times 0.4369+0.5548)=1.2494 \quad (15\text{ 分})$$

四、证明题(本题 10 分)

15. 对同一个 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$,误差为

$$y_k-\hat{y}_k=y_k-(a_1x_k+a_0),k=1,2,\cdots,n$$

总误差平方和 $Q(a_1,a_0)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-(a_1x_k+a_0))^2$ (4 分)

a_1,a_0 使 $Q(a_1,a_0)$最小,由二元函数极值原理,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q(a_1,a_0)}{\partial a_0}=0\\[2ex]\dfrac{\partial Q(a_1,a_0)}{\partial a_1}=0\end{cases}$$ (6 分)

即

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}(-2)(y_k-a_1x_k-a_0)=0\\[2ex]\sum_{k=1}^{n}(-2)(y_k-a_1x_k-a_0)x_k=0\end{cases}$$ (7 分)

整理得

$$\begin{cases}na_0+a_1\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}y_k\\[2ex]a_0\sum_{k=1}^{n}x_k+a_1\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\end{cases}$$ (10 分)

为 a_1, a_0 满足的法方程组