试卷代号：1012 **座位号**

中央广播电视大学2011—2012学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

计算机数学基础(2) 试题

2012年1月

题 号	一	二	三	总 分
分 数				

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题4分，共20分)

1. 以下误差限公式不正确的是(　　).

A. $\varepsilon(x_1+x_2)=\varepsilon(x_1)+\varepsilon(x_2)$　　B. $\varepsilon(x^2)=2|x|\varepsilon(x)$

C. $\varepsilon(x_1x_2)=|x_2|\varepsilon(x_1)+|x_1|\varepsilon(x_2)$　　D. $\varepsilon(x_1-x_2)=\varepsilon(x_1)-\varepsilon(x_2)$

2. 用高斯一赛德尔迭代法解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2-x_3=3\\ 2x_1+2x_2+x_3=5\end{cases}$$

的迭代公式中 $x_2^{(k+1)}=($　　$)(k=0,1,2,\cdots)$.

A. $3-x_1^{(k)}+x_3^{(k)}$　　B. $3-x_1^{(k)}+x_3^{(k+1)}$

C. $3-x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}$　　D. $3-x_1^{(k+1)}+x_3^{(k+1)}$

3. 以下命题正确的是(　　).

A. 过 $n+1$ 个互异节点的牛顿插值多项式最高次幂的系数为 $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ (此项不为0时)

B. 过节点 $(x_0, y_0),(x_1, y_1),\cdots,(x_n, y_n)(n>3)$，则均差 $f(x_3, x_0, x_4)\neq f(x_4, x_0, x_3)$

C. 过 $n+1$ 个互异节点的拉格朗日插值多项式一定是 n 次多项式

D. 三次样条函数 $S(x)$ 在每个子区间上是不超过3次的多项式

4. 求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-1)+f(1)$ 具有(　　)次代数精度．

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

5. 通过曲线 $f(x)$上的点($x_{k-1}, f(x_{k-1})$)和($x_k, f(x_k)$)的直线与 x 轴交点的横坐标是(　　)，就是弦截法解方程 $f(x)=0$ 的根的迭代公式．

A. $x_k+\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

B. $x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

C. $x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)+f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

D. $x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_{k-1})-f(x_k)}(x_k-x_{k-1})$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

6. 设近似值 $x=-9.73421$ 的相对误差限是 0.0005，则 x 至少有________位有效数字．

7. 用列主元消去法解线性方程组 $AX=b$ 时，在第 $k-1$ 步消元时，在增广矩阵的第 k 列取主元 $a_{rk}^{(k-1)}$，使得 $|a_{rk}^{(k-1)}|=$____________________．

8. 已知四对互异节点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)以及各阶均差 $f(x_0)=12$，$f(x_0, x_1)=-2$，$f(x_0, x_1, x_2)=3$，$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$. 则过这些点的牛顿插值多项式 $N(x)=$____．

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0, 0.5$ 处的函数值 $f(0)=1$ 和 $f(0.5)=1.20$，那么 $f'(0)\approx$____________．

10. 用牛顿切线法求方程 $x^4-2x-4=0$ 在区间$[1, 2]$内的近似根，取初始值 $x_0=1.5$，那么 $x_1\approx$____________．(取五位有效数字)

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用简单迭代法求线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

的 $X^{(3)}$. 取初始值 $X^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^T$,计算过程保留 4 位小数.

12. 已知函数值 $f(1)=2, f(3)=4, f(2)=-2$,求函数 $f(x)$的拉格朗日二次插值多项式 $P_2(x)$,并求 $f(1.5)$的近似值.

13. 设求积公式

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(-a) + A_1 f(0) + A_2 f(a)$$

试求待定系数 A_0, A_1, A_2使得该求积公式的代数精度尽量高.

14. 用二分法求方程 $f(x) = \sin x - \frac{x^2}{4} = 0$ 在区间[1.5,2]内的实根的近似值,使误差不超过 0.01. 计算过程保留 4 位小数.

试卷代号:1012

中央广播电视大学2011—2012学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

计算机数学基础(2) 试题答案及评分标准

(供参考)

2012年1月

一、单项选择题(每小题4分,共20分)

1\. D 2. C 3. A 4. A 5. B

二、填空题(每小题4分,共20分)

6\. 4

7\. $\max\limits_{k\le i\le n}|a_{ik}^{(k-1)}|$

8\. $12-2(x-x_0)+3(x-x_0)(x-x_1)$

9\. 0.4

10\. 1.6685

三、计算题(每小题15分,共60分)

11\. 解:写出迭代格式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0+0.375x_2^{(k)}-0.25x_3^{(k)}+2.5\\x_2^{(k+1)}=-0.3636x_1^{(k)}+0+0.0909x_3^{(k)}+3\\x_3^{(k+1)}=-0.5x_1^{(k)}-0.25x_2^{(k)}+0+3\end{cases}$$ (5分)

$X^{(0)}=(0,0,0)^T$.

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=0+0.375\times0-0.25\times0+2.5=2.5\\x_2^{(1)}=-0.3636\times0+0+0.0909\times0+3=3\\x_3^{(1)}=-0.5\times0-0.25\times0+0+3=3\end{cases}$$

得到 $X^{(1)}=(2.5,3,3)^T$ (9分)

$$\begin{cases}x_1^{(2)}=0+0.375\times3-0.25\times3+2.5=2.875\\x_2^{(2)}=-0.3636\times2.5+0+0.0909\times3+3=2.3637\\x_3^{(2)}=-0.5\times2.5-0.25\times3+0+3=1.0000\end{cases}$$

得到 $X^{(2)}=(2.875,2.3637,1.0000)^T$ (12分)

$$\begin{cases}x_1^{(3)}=0+0.375\times2.3637-0.25\times1+2.5=3.1364\\x_2^{(3)}=-0.3636\times2.875+0+0.0909\times1+3=2.0456\\x_3^{(3)}=-0.5\times2.875-0.25\times2.3637+0+3=0.9716\end{cases}$$

得到 $X^{(3)}=(3.1364,2.0456,0.9716)^T$. (15分)

12. 解：先求插值基函数，

$$l_0(x)=\frac{(x-3)(x-2)}{(1-3)(1-2)}=\frac{1}{2}(x-3)(x-2)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-(x-1)(x-3)$$ （5 分）

$$P_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

$$=\frac{2}{2}(x-3)(x-2)+\frac{4}{2}(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)$$ （9 分）

$f(1.5)\approx P(1.5)=(1.5-3)(1.5-2)+2(1.5-1)(1.5-2)+2(1.5-1)(1.5-3)$

$=1.5\times0.5-2\times0.5\times0.5-2\times0.5\times1.5=-1.25$ （15 分）

13. 解：因为有三个待定参数，至少列出三个方程，令 $f(x)=1,x,x^2$，代入求积公式，得到

$$\begin{cases}2a=A_0+A_1+A_2\\0=-A_0a+A_2a\\\dfrac{2a^3}{3}=A_0a^2+A_2a^2\end{cases}$$ （6 分）

解得 $A_0=A_2=\frac{a}{3}$，　$A_1=\frac{4a}{3}$．（9 分）

求积公式为

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{a}{3}[f(-a)+4f(0)+f(a)]$$ （13 分）

当 $f(x)=x^3$，使得求积公式精确成立，故该求积公式具有 3 次代数精度．（15 分）

14. 解：$\varepsilon=0.01$，$a=1.5$，$b=2$. 由二分次数公式

$$n>\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln2}-1=4.6$$ （5 分）

取 $n=5$，即二分有根区间 5 次．$f(1.5)=0.43>0$，$f(2)=-0.09$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.5	2	1.75	+
1	1.75	2	1.875	+
2	1.875	2	1.9375	−
3	1.875	1.9375	1.9063	+
4	1.9063	1.9375	1.9219	+
5	1.9219	1.9375	1.9297	

取 $*x\approx1.9297$ （15 分）